DS de mathématiques n°8

Polynômes, Fractions rationnelles, Équivalents, DL – Corrigé

Noté sur 120 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/90.

/17 **Exercice 1 : calcul de DES**

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans le corps indiqué :

$$F = \frac{X^3-1}{X^3+1} \quad \text{dans } \mathbb{R}(X) \qquad\qquad G = \frac{4X}{(X^2+1)^2} \text{ dans } \mathbb{C}(X)\text{, puis dans } \mathbb{R}(X)$$

/6,5

Fraction F. La fraction rationnelle F n'est pas de degré strictement négatif, on calcule sa partie entière (qui est donc non nulle) :

$$X^3 - 1 = 1 \times (X^3+1) - 2$$

si bien que

$$F = 1 - \frac{2}{X^3+1}$$

Calculons la DES de la fraction $\dfrac{2}{X^3+1}$. Comme -1 est racine évidente de X^3+1, on a :

$$X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$$

Ainsi, la forme de la DES est

$$\frac{2}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On trouve après calculs $a = \dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{2}{3}$ et $c = \dfrac{4}{3}$. Ainsi :

$$F = \boxed{1 - \frac{\frac{2}{3}}{X+1} - \frac{-\frac{2}{3}X + \frac{4}{3}}{X^2-X+1}}$$

/6,5

Fraction G dans $\mathbb{C}(X)$. Tout d'abord, $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ et donc la DES de G dans $\mathbb{C}(X)$ est de la forme :

$$G(X) = \frac{4X}{(X+i)^2(X-i)^2} = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{(X+i)^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{(X-i)^2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On trouve après calculs $(a, b, c, d) = (0, i, 0, -i)$, si bien que la DES de G dans $\mathbb{C}(X)$ est :

$$G = \boxed{\frac{i}{(X+i)^2} + \frac{-i}{(X-i)^2}}$$

/4

Fraction G dans $\mathbb{R}(X)$. La forme de la DES de G dans $\mathbb{R}(X)$ est la suivante :

$$G(X) = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On remarque que $a = b = d = 0$ et $c = 4$ conviennent. Ainsi, la forme de la DES de G dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$G = \boxed{\frac{4X}{(X^2+1)^2}}$$

/36,5 **Exercice 2 : Analyse asymptotique**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

/7 **1)** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x}$

On cherche un équivalent du numérateur et du dénominateur. Tout d'abord,

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et donc $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x &= 1+\frac{1}{3}(3x)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{(3x)^2}{2!}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1-\left(x+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\ &= -x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que le numérateur est équivalent en 0 à $-x^2$. Par quotient :

$$\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{\frac{x^2}{2}} = -2$$

On trouve ainsi que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} = \boxed{-2}$$

/2 **2) a)** Donner le $DL_7(0)$ de la fonction arctangente.

Comme

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\underset{x\to 0}{o}(x^6)$$

on obtient par intégration :

$$\arctan x-\arctan 0 = \arctan x = \boxed{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\underset{x\to 0}{o}(x^7)}$$

(Comme il s'agit d'une formule usuelle, on pouvait aussi la donner directement)

b) Justifier que la fonction tangente admet un $DL_7(0)$ et donner une forme de ce DL qui fait apparaitre seulement 4 coefficients inconnus (en justifiant pourquoi).

/2,5

La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^7$ sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ donc en particulier elle admet un $DL_7(0)$ par la formule de Taylor-Young. De plus, comme cette fonction est impaire, tous les termes d'ordre pair sont nuls. Ainsi la forme de ce DL est :

$$\tan x = \boxed{ax+bx^3+cx^5+dx^7+\underset{x\to 0}{o}(x^7)}$$

avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

c) En utilisant les questions précédentes et le fait que $\tan(\arctan x)=x$, déterminer le $DL_7(0)$ de la fonction tangente.

/7

Soit $x\in\mathbb{R}$. Par composition de DL, on a

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x) = \quad & a\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)+b\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)^3\\ & +c\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)^5+d\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)^7+\underset{x\to 0}{o}(x^7)\\ = \quad & a\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)+b\left(x^3-x^5+\frac{x^7}{3}+\frac{3}{5}x^7\right)\\ & +c\left(x^5-\frac{5}{3}x^7\right)+dx^7+\underset{x\to 0}{o}(x^7)\\ =&ax+\left(-\frac{a}{3}+b\right)x^3+\left(\frac{a}{5}-b+c\right)x^5+\left(-\frac{a}{7}+\frac{b}{3}-\frac{5}{3}c+d\right)x^7+\underset{x\to 0}{o}(x^7)\end{aligned}$$

Or, $\tan(\arctan x)=x=x+\underset{x\to 0}{o}(x^7)$, si bien que

$$x+\underset{x\to 0}{o}(x^7)=ax+\left(-\frac{a}{3}+b\right)x^3+\left(\frac{a}{5}-b+c\right)x^5+\left(-\frac{a}{7}+\frac{b}{3}+\frac{3}{5}b-\frac{5}{3}c+d\right)x^7+\underset{x\to 0}{o}(x^7)$$

Par unicité du $DL_7(0)$, on en conclut que

$$\begin{cases}a=1\\ -\frac{a}{3}+b=0\\ \frac{a}{5}-b+c=0\\ -\frac{a}{7}+\frac{14}{15}b-\frac{5}{3}c+d=0\end{cases}\qquad \begin{cases}a=1\\ b=1/3\\ c=b-a/5=\frac{2}{15}\\ d=\frac{5}{3}c-\frac{14}{15}b+\frac{a}{7}=\frac{17}{315}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\tan x = \boxed{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\underset{x\to 0}{o}(x^7)}$$

/4 **d)** En déduire $\tan^{(k)}(0)$ pour tout $k\in[\![1,7]\!]$.

D'après la formule de Taylor-Young, dans le DL de la fonction tangente, le coefficient d'ordre k du DL vaut $\frac{1}{k!}\tan^{(k)}(0)$. Or, par la question précédente, ces coefficients sont connus pour k allant de 1 à 7. Par conséquent :

- Pour $k \in [\![1,7]\!]$ pair, on a $\frac{1}{k!}\tan^{(k)}(0) = 0$, donc $\tan^{(k)}(0) = \boxed{0}$.
- Pour $k=1$, on a $\tan'(0) = \boxed{1}$.
- Pour $k=3$, on a $\frac{1}{3!}\tan^{(3)}(0) = \frac{1}{3}$, donc $\tan^{(3)}(0) = \boxed{2}$.
- Pour $k=5$, on a $\frac{1}{5!}\tan^{(5)}(0) = \frac{2}{15}$, donc $\tan^{(5)}(0) = \boxed{16}$.
- Pour $k=7$, on a $\frac{1}{7!}\tan^{(7)}(0) = \frac{17}{315}$, donc $\tan^{(7)}(0) = \boxed{272}$

/8 **3)** Déterminer le $\mathrm{DL}_{16}(0)$ de $(\mathrm{sh}x - \sin x)^2(\tan x - \mathrm{th}x)^3$.

On remarque que

$$\mathrm{sh}x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

et de plus

$$\begin{aligned}\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} &= \frac{x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\tan x - \mathrm{th}x &= x + \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les DL précédemment calculés :

$$\begin{aligned}(\mathrm{sh}x - \sin x)^2(\tan x - \mathrm{th}x)^3 &= \left(\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2\left(\frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^3 \\ &= \left(\frac{x^6}{9} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right)\left(\frac{8x^9}{27} + \underset{x\to 0}{o}(x^9)\right) \\ &= \frac{8}{243}x^{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^{15})\end{aligned}$$

Ceci n'est un DL qu'à l'ordre 15, mais on remarque que l'expression $(\mathrm{sh}x - \sin x)^2(\tan x - \mathrm{th}x)^3$ est impaire en x, d'où le terme d'ordre 16 est nul. En définitive,

$$(\mathrm{sh}x - \sin x)^2(\tan x - \mathrm{th}x)^3 = \boxed{\frac{8}{243}x^{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^{16})}$$

4) Déterminer un équivalent de $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ en $+\infty$. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de cette expression en $+\infty$. /6

$$\begin{aligned}x\ln(x+1) - (x+1)\ln x &= x\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - (x+1)\ln x \\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln x\end{aligned}$$

Or, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$, si bien que $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$. Ainsi,

$$x\ln(x+1) - (x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{-\ln x}$$

On cherche ensuite un DA à 3 termes de l'expression voulue en cherchant un DA à deux termes de :

$$\begin{aligned}x\ln(x+1) - (x+1)\ln x + \ln x &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Finalement, le DA à 3 termes voulu est :

$$x\ln(x+1)-(x+1)\ln x = \boxed{-\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

/24,5 Exercice-Problème 3 : Polynômes de Legendre

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note :

$$U_n=(X^2-1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n=\frac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$$

Enfin, on notera a_n le coefficient dominant de L_n.

/1 **1) a)** Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2=\frac{1}{2}(3X^2-1)$.

- $U_0=1$ donc $L_0=\dfrac{1}{2^0 0!}1=\boxed{1}$
- $U_1=X^2-1$ et $U_1'=2X$ donc $L_1=\dfrac{1}{2.1!}(2X)=\boxed{X}$
- $U_2=(X^2-1)^2$ et $U_2'=2(X^2-1)2X=4X(X^2-1)$. Enfin,

$$U_2''=12X^2-4$$

donc

$$L_2=\frac{1}{4.2}(12X^2-4)=\boxed{\frac{1}{2}\left(3X^2-1\right)}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que L_n est de degré n, et déterminer le coefficient a_n.

/6

On a

$$\deg U_n = n\deg(X^2-1)=2n$$

et donc, comme $n\leq 2n$, on a $\deg U_n^{(n)}=2n-n=n$. Ainsi, (comme $\dfrac{1}{2^n n!}\neq 0$),

$$\deg L_n=\deg U_n^{(n)}=\boxed{n}$$

Le terme dominant de U_n vaut X^{2n}, celui de $U_n^{(n)}$ vaut donc

$$(2n)(2n-1)\cdots(n+1)X^n=\frac{(2n)!}{n!}X^n$$

Ainsi le coefficient dominant de L_n est

$$\frac{1}{2^n n!}\times\frac{(2n)!}{n!}=\boxed{\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}}$$

/1,5 **c)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de U_n, et préciser leurs multiplicités.

On remarque que $U_n=(X-1)^n(X+1)^n$, et donc (comme il s'agit de sa décomposition en produit de polynômes irréductibles) les racines de U_n sont 1 et -1, de multiplicité n chacune.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x^2-1)^n$.

/1,5 **a)** Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et montrer qu'il existe $c\in]-1,1[$ tel que $f'(c)=0$.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que fonction polynômiale. De plus, on remarque que $f(1)=0=f(-1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c\in]-1,1[$ tel que $f'(c)=0$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha_1\in\mathbb{R}$ tel que :

$$U_n'=\alpha_1(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-c)$$

/2,5

Le polynôme U_n est de degré $2n\geq 1$, donc le degré de U_n' est $2n-1$. De plus, par les deux questions précédentes :

- Comme 1 et -1 sont racines de U_n de multiplicité $n\geq 1$, ce sont des racines de U_n' de multiplicité $n-1$.
- c est racine de U_n' de multiplicité au moins 1.

On a donc trouvé un total de $(n-1)+(n-1)+1=2n-1$ racines comptées avec multiplicité de U_n'. Comme $\deg U_n'=2n-1$, on peut factoriser U_n'. En posant α_1 le coefficient dominant de U_n', on a donc :

$$U_n'=\boxed{\alpha_1(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-c)}$$

3) Dans cette question seulement, on suppose $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et des réels $c_1 < \ldots < c_k$ dans $]-1, 1[$ tels que :

$$U_n^{(k)} = \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-c_1)\cdots(X-c_k)$$

On note de plus $c_0 = -1$ et $c_{k+1} = 1$. Justifier qu'il existe des réels $d_1 < \ldots < d_{k+1}$ dans $]-1, 1[$ tels que

$$U_n^{(k+1)} = \alpha_{k+1}(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-d_1)\cdots(X-d_{k+1})$$

/6

Soit f_k la fonction polynômiale associée à $U_n^{(k)}$. On remarque que f_k s'annule en $c_0, c_1, \cdots, c_{k+1}$. De plus, f_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$. Par le théorème de Rolle sur chacun des segments $[c_0, c_1]$, $\cdots$, $[c_k, c_{k+1}]$, on en déduit qu'il existe des réels $d_1 \in]c_0, c_1[$, $\cdots$, $d_{k+1} \in]c_k, c_{k+1}[$ tels que

$$f_k'(d_1) = \ldots = f_k'(d_{k+1}) = 0$$

c'est-à-dire

$$U_n^{(k+1)}(d_1) = \ldots = U_n^{(k+1)}(d_{k+1}) = 0$$

En particulier, $d_1, \cdots, d_{k+1}$ sont racines de $U_n^{(k+1)}$ de multiplicités au moins 1 et par ailleurs par récurrence immédiate, 1 et -1 sont racines de $U_n^{(k+1)}$ de multiplicités $n-(k+1)$. On a donc trouvé un total de $2n-2(k+1)+(k+1) = 2n-(k+1)$ racines comptées avec multiplicité. Comme $U_n^{(k+1)}$ est de degré $2n-(k+1)$, on a trouvé toutes ses racines. En posant α_{k+1} son coefficient dominant, on obtient :

$$U_n^{(k+1)} = \boxed{\alpha_{k+1}(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-d_1)\cdots(X-d_{k+1})}$$

Enfin, on a $d_1 < c_1 < d_2$ donc $d_1 < d_2$. Sur le même principe, on montre que $d_1 < d_2 < \ldots < d_{k+1}$.

/6 **4)** En déduire que L_n est scindé à racines simples, toutes dans $]-1, 1[$.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et un ensemble $A_k \subset]-1, 1[$ possédant k éléments tels que

$$U_n^{(k)} = \alpha_k (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k} \prod_{r \in A_k} (X-r)$$

Pour $k = 1$, la question **2)** suffit à déterminer l'assertion avec $A_1 = \{c\}$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose la propriété vraie au rang k, où on note $c_1, \cdots, c_k$ les éléments de A_k. Montrons la propriété au rang $k+1$. Par la question **3)**, on peut poser $A_{k+1} = \{d_1, \cdots, d_{k+1}\}$ et obtenir le résultat voulu. Finalement la propriété est vérifiée pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

En particulier, avec $k = n$, on en déduit qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et des réels $r_1, \cdots, r_n$ distincts (car A_n possède n éléments) tels que

$$U_n^{(n)} = \alpha_n (X-r_1)\cdots(X-r_n)$$

Dans ce cas,

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} = \frac{\alpha_n}{2^n n!}(X-r_1)\cdots(X-r_n)$$

et comme $r_1, \cdots, r_n$ sont distincts, L_n est bien scindé à racines simples.

/25 **Exercice 4 : Un calcul de DES par un calcul de DL**

On souhaite calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction suivante F :

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^3}$$

On remarque que 1 est un pôle de F.

/3 **1)** Factoriser $\left(X^3-1\right)^3$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$. On posera $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On sait que

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

Or, le discriminant de X^2+X+1 est -3 et donc ses deux racines sont $-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}$, c'est-à-dire j et $\bar{j}$. Ainsi, la décomposition de X^3-1 dans $\mathbb{C}(X)$ est :

$$\begin{aligned}(X^3-1)^3 &= \left((X-1)(X-j)(X-\bar{j})\right)^3 \\ &= \boxed{(X-1)^3(X-j)^3(X-\bar{j})^3}\end{aligned}$$

Quant à celle dans $\mathbb{R}(X)$, elle vaut :

$$(X^3-1)^3 = \boxed{(X-1)^3(X^2+X+1)^3}$$

Dans la suite, on pose Q le polynôme *réel* tel que $(X^3-1)^3 = (X-1)^3 Q$.

2) Déterminer le DL à l'ordre 2 au point 1 de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{Q(x)}$ (avec $x \in \mathbb{R}$).

/5

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait a vu que $Q(x) = (x^2 + x + 1)^3$. On pose h le réel tel que $x = 1 + h$ et on cherche le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $h \mapsto \dfrac{1}{Q(1+h)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(1+h)} &= \frac{1}{(1+h)^2 + (1+h) + 1} \\
&= \frac{1}{3 + 3h + h^2} \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{1 + h + \frac{h^2}{3}} \right)
\end{aligned}$$

On pose $H = h + \dfrac{h^2}{3}$. On a bien $H \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ donc par composée :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(1+h)} &= \frac{1}{3} \times \left(1 - H + H^2 + o(H^2)\right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(h + \frac{h^2}{3}\right) + \left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2 + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(1 - h - \frac{h^2}{3} + h^2 + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(1 - h + \frac{2h^2}{3} + o(h^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(1+h)} &= \left(\frac{1}{3} \times \left(1 - h + \frac{2h^2}{3} + o(h^2)\right)\right)^3 \\
&= \frac{1}{27}\left(1 - 3h + 3h^2 + 2h^2\right) + o(h^2) \\
&= \frac{1}{27} - \frac{1}{9}h + \frac{5}{27}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

D'où, comme $h = x - 1$,

$$g(x) = \boxed{\frac{1}{27} - \frac{1}{9}(x-1) + \frac{5}{27}(x-1)^2 + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^2\right)}$$

3) En déduire l'équation de la tangente en 1 à la courbe de g ainsi que leurs positions relatives.

/2,5

D'après le DL obtenu à la question précédente, g admet comme tangente en 1 la droite d'équation $y(x) = \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{9}(x-1)$, et comme $g(x) - y(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{5}{27}(x-1)^2$ et que ce terme est positif, on en déduit que la courbe de g se situe au-dessus de sa tangente au voisinage de 1.

4) Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, donner la forme de la DES de $F(x)$ sur $\mathbb{C}$, sans déterminer les coefficients.

/1,5

La forme obtenue est la suivante :

$$F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-j} + \frac{e}{(x-j)^2} + \frac{f}{(x-j)^3} + \frac{g}{x-\overline{j}} + \frac{h}{(x-\overline{j})^2} + \frac{k}{(x-\overline{j})}$$

avec $a, b, c, d, e, f, g, h, k \in \mathbb{C}$.

5) En utilisant la question **2)**, calculer les coefficients des fractions dont 1 est le pôle.

/6,5

On remarque que

$$\begin{aligned}
(x-1)^3 F(x) &= \frac{1}{Q(x)} \\
&= a(x-1)^2 + b(x-1) + c + (x-1)^3 \times \left(\frac{d}{x-j} + \frac{e}{(x-j)^2} + \frac{f}{(x-j)^3} + \frac{g}{x-\overline{j}} + \frac{h}{(x-\overline{j})^2} + \right. \\
&= a(x-1)^2 + b(x-1) + c + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^2\right)
\end{aligned}$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\dfrac{1}{Q(x)}$, on en déduit que $\begin{cases} c = \dfrac{1}{27} \\ b = -\dfrac{1}{9} \\ a = \dfrac{5}{27} \end{cases}$

Ainsi, la partie (dite polaire) de la DES de F associée au pôle 1 est :

$$\boxed{\frac{\frac{5}{27}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{27}}{(x-1)^3}}$$

/6,5 **6)** En utilisant le fait que $F(jX) = F(j^2X) = F(X)$, déterminer les autres coefficients. On précisera l'argument utilisé.

marque que, puisque $\dfrac{1}{j} = j^2$:

$$= \frac{a}{jX-1} + \frac{b}{(jX-1)^2} + \frac{c}{(jX-1)^3} + \frac{d}{jX-j} + \frac{e}{(jX-j)^2} + \frac{f}{(jX-j)^3} + \frac{g}{jX-j^2} + \frac{h}{(jX-j^2)^2} + \frac{k}{(jX-j^2)^3}$$

$$= \frac{a/j}{X-j^2} + \frac{b/j^2}{X-j^2} + \frac{c}{(X-j^2)^3} + \frac{d/j}{X-1} + \frac{e/j^2}{(X-1)^2} + \frac{f}{(X-1)^3} + \frac{g/j}{X-j} + \frac{h/j^2}{(X-j)^2} + \frac{k}{(X-j^2)^3}$$

$X) = F(jX)$. Par unicité de la DES de F, on en déduit que les co-ts de la partie polaire associée au pôle 1 sont identiques dans les deux positions. Ainsi :

$$\begin{cases} d/j = 5/27 \\ e/j^2 = -1/9 \\ f = 1/27 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 5j/27 \\ e = -j^2/9 \\ f = 1/27 \end{cases}$$

même procédé, en échangeant les rôles de j^2 et de j, on trouve que

$$\begin{cases} g/j^2 = 5/27 \\ h/j = -1/9 \\ k = 1/27 \end{cases} \quad \begin{cases} g = 5j^2/27 \\ h = -j/9 \\ k = 1/27 \end{cases}$$

nent,

$$= \boxed{\frac{\frac{5}{27}}{X-1} + \frac{-\frac{1}{9}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{27}}{(X-1)^3} + \frac{\frac{5}{27}j}{X-j} + \frac{-\frac{1}{9}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{27}}{(X-j)^3} + \frac{\frac{5}{27}j^2}{X-\overline{j}} + \frac{-\frac{1}{9}j}{(X-\overline{j})^2} + \frac{\frac{1}{27}}{(X-\overline{j})^3}}$$

/17 Exercice 5 : Polynômes divisibles par leur dérivée première

Dans cet exercice, on cherche tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

/8 **1)** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que si P a exactement k racines distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $P \wedge P'$ est de degré $n - k$.

On suppose que P admet k racines distinctes dans $\mathbb{C}$. On peut donc le décomposer sous la forme suivante :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ distincts et $m_1, \cdots, m_k \in \mathbb{N}^*$. En particulier, α_i est racine de P de multiplicité m_i, donc c'est aussi une racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ (avec la convention qu'une racine de multiplicité 0 n'est de facto pas une racine). Ainsi, il existe un polynôme Q tel que :

$$P' = \mu Q \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i - 1}$$

avec $\mu \in \mathbb{C}^*$ et Q un polynôme unitaire tel que $Q(\alpha_1), \cdots, Q(\alpha_k)$ soient non nuls. Ainsi, on constate par un argument de valuations que le polynôme $P \wedge P'$ est

$$P \wedge P' = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i - 1}$$

On en conclut que

$$\deg(P \wedge P') = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} m_i - k = \deg P - k = \boxed{n-k}$$

/5 **2)** En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : soit P un polynôme tel que P' divise P. Cela équivaut à dire que $P \wedge P' = P'$. Distinguons quelques cas :

- Le polynôme nul est trivialement solution du problème (on rappelle que $0 \wedge 0 = 0$).
- Un polynôme constant non nul ne sera pas solution, à nouveau de manière immédiate.
- Si $n = \deg P \geq 1$, alors P admet entre 1 et n racines distinctes dans $\mathbb{C}$ ce qui permet d'appliquer le résultat de la question précédente. On en conclut que $P \wedge P'$ est de degré $n - k$. Or, P' est de degré $n - 1$. Cela conduit à

la condition $k = 1$. Ainsi, P ne possède qu'une seule racine dans $\mathbb{C}$: on peut donc écrire

$$P = \lambda(X - \alpha)^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Synthèse : le polynôme nul est solution comme dit plus haut. Vérifions si $P = \lambda(X - \alpha)^n$ est solution.

$$P' = \lambda n(X - \alpha)^{n-1}$$

Ce polynôme divise bien P. Ainsi, les solutions sont :

$$\mathcal{S} = \{0\} \cup \{\lambda(X - \alpha)^n \mid \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

ce que l'on peut combiner en :

$$\mathcal{S} = \boxed{\{\lambda(X - \alpha)^n \mid \lambda, \alpha \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}}$$

3) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P dans $\mathbb{R}[X]$.
Lucena, élève en MPSI, vous met en garde : la question **2)** *ne permet pas de conclure immédiatement car elle conduit au fait que $P = Q_1 P'$ avec $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$... Or, on souhaite avoir $P = Q_2 P'$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, et on ne peut pas poser*
/4 *$Q_2 = Q_1$ a priori...*

Analyse : soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel tel que P' divise P dans $\mathbb{R}[X]$, i.e. $P = QP'$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. En particulier, Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donc P' divise P dans $\mathbb{C}[X]$. Par ce qui précède, on peut donc écrire que

$$P = \lambda(X - \alpha)^n$$

avec $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Or, $P \in \mathbb{R}[X]$, donc ses coefficients sont tous réels. Si $\lambda \neq 0$, le coefficient dominant de P est λ, qui doit donc être réel. Enfin, si $\lambda \neq 0$, le coefficient de degré $n - 1$ de P est $-n\alpha\lambda$, qui doit donc être réel. Ainsi,

$$0 = \mathrm{Im}\,(-n\alpha\lambda) = -n\lambda \mathrm{Im}\,\alpha$$

et on en conclut que $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$. D'où $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, nécessairement P doit être de la forme $\lambda(X - \alpha)^n$ avec $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Synthèse : on vérifie comme en question précédente que les polynômes de la forme ci-dessus sont solutions. Ainsi :

$$\mathcal{S} = \boxed{\{\lambda(X - \alpha)^n \mid \lambda, \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*\}}$$